

PROFILS DE CONCENTRATIONS DANS UNE COUCHE LIMITE LAMINAIRE FIGÉE AVEC UNE REPARTITION CONTINUE ET DISCONTINUE DE CATALYSEUR SUR LA PAROI

G. LASSAU et B. LE FUR

Laboratoire d'Aérodynamique du C.N.R.S., 92-Meudon, France

(Reçu le 25 Novembre 1966)

Résumé—On présente une méthode d'intégration de la couche limite laminaire dans un fluide à propriétés physiques constantes, en développant plus particulièrement le calcul relatif à l'équation de la diffusion. Cette méthode consiste en un processus itératif.

La première approximation a été résolue entièrement et les profils de concentration réduite correspondant à différentes conditions aux limites, sont présentés. Dans le cas particulier de la plaque plane où l'on peut comparer avec les intégrations exactes (profils en similitude), on constate que l'erreur est faible et dépend du nombre de Schmidt.

Lorsque le gradient de pression dans la couche limite n'est plus négligeable, on améliore beaucoup les résultats en résolvant les équations de la deuxième approximation. Cette résolution introduit une correction fonction du nombre de Schmidt. Dans le cas particulier de la plaque plane (profils en similitude), on retrouve, à moins de 1 pour cent, les profils exacts de vitesse et de concentration. L'expression de la densité de flux de masse à la paroi, dans le cas d'une catalyse du premier ordre, a été déterminée, dans le cadre de la deuxième approximation, en fonction des nombres de Schmidt et de Damköhler catalytique (rapport de la constante de la réaction à la vitesse de l'écoulement).

L'intérêt de ces calculs est qu'ils sont applicables à des conditions où la similitude ne peut être utilisée, les calculs numériques sur machines étant d'ailleurs beaucoup plus simples que ceux qui mettent en oeuvre les méthodes de différences finies.

NOTATIONS

<p>A_M, A_N, concentrations des composants M et N, (masse par unité de volume);</p> <p>a, concentration réduite du composant M;</p> <p>c_p chaleur spécifique à pression constante de l'air;</p> <p>D, coefficient de diffusion;</p> <p>Da, nombre de Damköhler égal à $\frac{k_d + k_i}{u_\infty}$;</p> <p>$k_d$, constante cinétique de la réaction directe;</p> <p>k_i, constante cinétique de la réaction inverse;</p> <p>L, longueur de la plaque;</p> <p>M, N, composants de la réaction $M \rightarrow N$;</p> <p>Pe, nombre de Péclet rapporté à une</p>	<p>dimension caractéristique de l'écoulement, $Pe = uL/D$;</p> <p>Pr, nombre de Prandtl égal à $\mu c_p/\lambda$;</p> <p>Sc, nombre de Schmidt égal à ν/D;</p> <p>t, variable auxiliaire égale à $\int_0^x (2\tau_p)^{\frac{1}{2}} dx$;</p> <p>$u, v$, composantes de la vitesse;</p> <p>x, y, système de coordonnées;</p> <p>α, variable auxiliaire égale à $(4/9)Sc \psi^{3/2}$;</p> <p>λ, conductivité thermique du fluide;</p> <p>μ, viscosité;</p> <p>ν, viscosité cinématique;</p> <p>τ_p, tension de frottement;</p> <p>ψ, fonction de courant.</p>
<p>Indices</p> <p>e, à l'extérieur de la couche limite;</p>	

$p.$ à la paroi;
 $\infty.$ à l'infini amont.

et

$$u \frac{\partial A_N}{\partial x} + v \frac{\partial A_N}{\partial y} = D \frac{\partial^2 A_N}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

INTRODUCTION

LORS de la rentrée des engins dans l'atmosphère, les composants de l'air subissent une transformation à la traversée de l'onde de choc par suite de la forte élévation de température. Leur équilibre dépend alors des paramètres thermodynamiques de l'onde de choc. Au voisinage de la paroi, les variables thermodynamiques subissent une brusque variation, mais l'équilibre chimique ne suit pas cette discontinuité, car la constante de temps de la réaction inverse est très grande devant le temps de séjour des gaz le long de l'engin. Nous aurons donc, le long de la paroi, une couche limite formée de gaz dans un état métastable. Généralement, la paroi a un effet catalytique qui rend la vitesse de réaction suffisamment grande pour modifier l'état du gaz à la paroi.

Nous avons étudié ici un problème catalytique analogue dans un cas extrêmement simple.

1. MISE EN EQUATION

Supposons un écoulement gazeux en équilibre métastable le long d'un obstacle bidimensionnel recouvert d'un catalyseur. Supposons également: que le mélange gazeux soit composé de deux corps, M et N ; que la réaction $M \rightarrow N$ s'effectue sans changement de volume; que les propriétés physiques du mélange M et N soient indépendantes de la concentration et de la température.

Si le nombre de Péclet rapporté à l'extérieur de la couche limite est grand devant l'unité, les équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent les concentrations $A_M(x, y)$ et $A_N(x, y)$ des constituants à l'intérieur de la couche limite laminaire sont de la forme:

$$u \frac{\partial A_M}{\partial x} + v \frac{\partial A_M}{\partial y} = D \frac{\partial^2 A_M}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

où u et v sont les composantes de la vitesse, respectivement suivant la direction du courant et la direction normale à la paroi de l'obstacle: D est le coefficient de diffusion massique d'un constituant M dans le constituant N défini par la loi qui donne l'expression de la composante normale de la densité de flux de masse φ_M du composant M :

$$\varphi_M = -D \left(\frac{\partial A_M}{\partial y} \right). \quad (1.3)$$

Remarquons que les équations ne comportent pas ici de termes de transformation chimique dans le second membre, car on a supposé que les vitesses de réaction en phase homogène sont faibles devant les termes de transport par convection et diffusion (couche limite figée).

La condition à la paroi est obtenue en écrivant l'égalité entre la vitesse de production par unité de surface due à la réaction chimique catalysée, et la composante normale de la densité de flux de masse, soit:

$$(\varphi_M)_p = - [k_d(A_M)_p - k_i(A_N)_p], \quad (1.4)$$

$$(\varphi_N)_p = - (\varphi_M)_p. \quad (1.5)$$

k_d et k_i sont respectivement les constantes de la réaction chimique directe $M \rightarrow N$ et inverse $N \rightarrow M$.

L'hypothèse d'une réaction catalytique du premier ordre correspond à des conditions expérimentales à basse pression [1] ou à faible concentration.

Les deux autres conditions aux limites sont:

$$y \rightarrow \infty, \quad A_M \rightarrow (A_M)_\infty, \quad A_N \rightarrow (A_N)_\infty; \quad (1.6)$$

$$x = 0, \quad A_M = (A_M)_\infty, \quad A_N = (A_N)_\infty. \quad (1.7)$$

Les concentrations sont supposées constantes à l'extérieur de la couche limite et égales aux

concentrations à l'infini amont (écoulement figé).

Nous avons supposé, au départ, que la masse volumique du mélange ne dépendait pas de la concentration :

$$A_M + A_N = \rho. \quad (1.8)$$

L'équation (1.2) se ramène donc à l'équation (1.1) que l'on peut résoudre avec les conditions aux limites (1.6) et la condition à la paroi :

$$\begin{aligned} (\varphi_M)_p &= -D \left(\frac{\partial A_M}{\partial y} \right)_p \\ &= (k_d + k_i)(A_M)_p - k_i \rho \\ &= (k_d + k_i) [(A_M)_p - (A_M)_{\text{éq}}] \end{aligned} \quad (1.9)$$

où $(A_M)_{\text{éq}}$ est la concentration à l'équilibre définie par :

$$(A_M)_{\text{éq}} = \frac{k_i \rho}{k_d + k_i}. \quad (1.10)$$

Introduisons la concentration réduite, a^* , fonction de la concentration d'équilibre :

$$a^* = \frac{(A_M)_{\text{éq}} - (A_M)}{(A_M)_{\text{éq}} - (A_M)_{\infty}} \quad (1.11)$$

et les dimensions réduites :

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{u_{\infty}}, & v^* &= \frac{v}{u_{\infty}}, & x^* &= \frac{x \cdot u_{\infty}}{v}, \\ y^* &= \frac{y \cdot u_{\infty}}{v}, & \varphi^* &= \frac{\varphi_M}{[(A_M)_{\text{éq}} - (A_M)_{\infty}] u_{\infty}}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

L'équation (1.1) s'écrit :

$$u^* \frac{\partial a^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial a^*}{\partial y^*} = \frac{1}{Sc} \cdot \frac{\partial^2 a^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.13)$$

où Sc est le nombre de Schmidt égal à v/D .

Les conditions aux limites deviennent :

$$y^* = 0, \quad \frac{1}{Sc} \frac{\partial a^*}{\partial y^*} = Da \cdot a^* = -\varphi_p^*(a^*), \quad (1.14)$$

Da est le nombre de Damköhler catalytique égal à $(k_i + k_d)/u_{\infty}$

$$y^* \rightarrow \infty, \quad a^* \rightarrow 1, \quad (1.15)$$

$$x^* = 0, \quad a^* = 1. \quad (1.16)$$

Pour résoudre l'équation (1.1) il faut introduire l'équation de la conservation de la masse, écrite en variables réduites :

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0, \quad (1.17)$$

et l'équation de l'impulsion :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = u_e^* \frac{du_e^*}{dx^*} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (1.18)$$

avec ses conditions aux limites :

$$y^* \rightarrow 0, \quad u^* \text{ et } v^* \rightarrow 0, \quad (1.19)$$

$$y^* \rightarrow \infty, \quad u^* \rightarrow u_e^*(x^*). \quad (1.20)$$

Nous établirons que le paramètre fondamental qui intervient dans la résolution de ces équations est la contrainte à la paroi :

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_p; \quad (1.21)$$

à cette contrainte correspond la variable sans dimensions :

$$\tau_p^* = \frac{\tau_p}{\rho u_{\infty}^2} = \left(\frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right)_p. \quad (1.22)$$

Dans la suite du calcul, les variables réduites étant les seules variables utilisées, nous les écrirons sans astérisque.

2. METHODE D'INTEGRATION

Introduisons, par la transformation de Von Mises, la fonction de courant réduite ψ comme variable indépendante ; elle satisfait à l'équation de la conservation de la masse, car :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Les équations (1.18) et (1.13) deviennent :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} - u_e \frac{du_e}{dx} - u \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial a}{\partial \psi} \right) = 0. \quad (2.3)$$

Nous éliminerons le terme $u_e (du_e/dx)$ en posant :

$$Z = u_e^2(x) - u^2(x, \psi) \quad (2.4)$$

il vient :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - u \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial a}{\partial \psi} \right) = 0 \quad (2.6)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} x \rightarrow 0 \quad Z(x, \psi) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad a(x, \psi) \rightarrow 1 \\ \psi \rightarrow \infty \quad Z(x, \psi) \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad a(x, \psi) \rightarrow 1 \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} Z(x, \psi) = u_e^2(x) \quad \text{et} \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} \left(\frac{u}{Sc} \frac{\partial a}{\partial \psi} \right) = Da \cdot \lim_{\psi \rightarrow 0} a. \end{array} \right\} (2.7)$$

Soit $u^{(0)}(x, \psi)$ l'équation de la tangente à l'origine du profil de vitesse. Elle s'exprime en fonction de la contrainte tangentielle pariétale :

$$\tau_p = \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \lim_{\psi \rightarrow 0} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right). \quad (2.8)$$

On a donc :

$$u^{(0)}(x, \psi) = (2\tau_p)^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}}. \quad (2.9)$$

Ajoutons $u(\partial^2 Z/\partial \psi^2)$ et retranchons $u^{(0)}(\partial^2 Z/\partial \psi^2)$ aux deux membres de l'équation de l'impulsion :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - u^{(0)} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} = (u - u^{(0)}) \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2}. \quad (2.10)$$

On aura, d'une façon analogue, une expression équivalente pour l'équation de la diffusion (2.7) :

$$\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u^{(0)} \frac{\partial a}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[(u - u^{(0)}) \frac{\partial a}{\partial \psi} \right]. \quad (2.11)$$

Nous allons nous placer maintenant dans un plan auxiliaire (t, ψ) , où t est une nouvelle variable indépendante :

$$t = \int_0^x (2\tau_p)^{\frac{1}{2}} dx \quad (2.12)$$

qui permet d'éliminer dans le premier membre le terme $(2\tau_p)^{\frac{1}{2}}$ qui provient de $u^{(0)}$.

Nous aurons donc le système :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2} = \left(\frac{u}{(2\tau_p)^{\frac{1}{2}}} - \psi^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial^2 Z}{\partial \psi^2}. \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial a}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u}{(2\tau_p)^{\frac{1}{2}}} - \psi^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial a}{\partial \psi} \right]. \quad (2.14)$$

Pour résoudre ce système, nous utiliserons une méthode d'intégration par approximations successives : dans la première approximation, on négligera le second membre des équations qui est nul à la paroi et à l'extérieur de la couche limite ; dans le cas de l'équation de la diffusion, cette hypothèse sera d'autant plus justifiée que l'épaisseur de la couche limite de diffusion sera plus faible que l'épaisseur de la couche limite dynamique, c'est-à-dire lorsque le nombre de Schmidt sera grand devant l'unité. On écrira donc, l'indice 1 signifiant que l'on a affaire aux solutions de la première approximation :

$$\frac{\partial Z_1}{\partial t} - \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \psi^2} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial a_1}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \cdot \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial a_1}{\partial \psi} \right) = 0. \tag{2.16}$$

Dans les approximations suivantes, on remplacera dans le second membre u , τ_p , Z et a par les expressions de l'approximation antérieure, c'est-à-dire, pour $i \geq 1$:

$$\frac{\partial Z_{i+1}}{\partial t} - \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 Z_{i+1}}{\partial \psi^2} = \left[\frac{u_i}{(2\tau_{pi})^{\frac{1}{2}}} - \psi^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial^2 Z_i}{\partial \psi^2} \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial a_{i+1}}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial a_{i+1}}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u_i}{2\tau_{pi}^{\frac{1}{2}}} - \psi^{\frac{1}{2}} \right) \frac{\partial a_i}{\partial \psi} \right]. \tag{2.18}$$

Pour pouvoir revenir au plan physique (x, y) , il faudrait connaître les vraies valeurs de τ_p et de u . Comme nous ne les connaissons pas, nous ferons correspondre à chaque solution d'indice i dans le plan (t, ψ) une transformation différente pour passer au plan physique (x, y) :

$$x = F_i(t, \psi) = \int_0^t \frac{dt}{(2\tau_{pi})^{\frac{1}{2}}}, \tag{2.19}$$

$$y = G_i(t, \psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{u_i}. \tag{2.20}$$

La résolution de l'équation de l'impulsion (2.15) de la première approximation nous donne, pour calculer $\tau_{p1}(t)$, l'équation intégrale suivante [2, 3]:

$$\int_0^t (t - t')^{-\frac{1}{2}} \tau_{p1}(t') dt' = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}}} u_e^2(t). \tag{2.21}$$

Comme :

$$x = F_1(t, \psi) = \int_0^t \frac{dt}{(2\tau_{p1})^{\frac{1}{2}}},$$

la contrainte tangentielle pariétale sera solution de l'équation intégrale:

$$\int_0^x \left(\int_{x'}^x [\tau_{p1}(x'')]^{\frac{1}{2}} dx'' \right)^{-\frac{1}{2}} [\tau_{p1}(x')]^{\frac{1}{2}} dx' = \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}}} u_e^2(x). \tag{2.22}$$

3. FORMULE DONNANT LE PROFIL DE CONCENTRATION DANS LE CAS DE LA PREMIERE APPROXIMATION

Pour avoir une condition de nullité à l'extérieur de la couche limite, posons:

$$\theta_1 = a_1 - 1. \tag{3.1}$$

Les conditions aux limites (2.7) deviennent :

$$\left. \begin{aligned} \theta_1(0, \psi) = \theta_1(t, \infty) = 0, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} \theta_1(t, \psi) = \theta_p(t). \end{aligned} \right\} \tag{3.2}$$

θ_p étant relié au flux par l'équation (1.14) et (3.1), on a :

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\frac{2}{3}} \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi} \right). \quad (3.3)$$

Éliminons, en utilisant le calcul symbolique, la dérivation par rapport à la variable t .

En employant la formule de Carson, l'équation (3.3) devient :

$$p \mathcal{C}_1 - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\frac{2}{3}} \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial \psi} \right) = 0. \quad (3.4)$$

Prenons comme nouvelle variable :

$$s = \frac{4}{3} Sc^{\frac{1}{3}} p^{\frac{1}{3}} \psi^{\frac{2}{3}}, \quad (3.5)$$

et comme nouvelle fonction :

$$V_1(p, s) = s^{-\frac{1}{3}} \mathcal{C}_1(p, \psi). \quad (3.6)$$

Divisons l'équation par $p s^{\frac{1}{3}}$, nous obtenons une équation de Bessel sans second membre :

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial V_1}{\partial s} - \left(1 + \frac{1}{9s^2} \right) V_1 = 0 \quad (3.7)$$

avec les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} [s^{\frac{1}{3}} V_1(p, s)] &= \delta(p) = \theta_p(t), \\ \lim_{s \rightarrow \infty} [s^{\frac{1}{3}} V_1(p, s)] &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

La solution de l'équation (3.7) avec les conditions aux limites (3.8) s'écrit :

$$V_1(p, s) = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{2^{\frac{1}{3}}} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \delta(p) K_{\frac{1}{3}}(s). \quad (3.9)$$

Revenons à $\mathcal{C}_1(p, \psi)$, avec les variables p et ψ .

$$\mathcal{C}_1(p, \psi) = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})}{2^{\frac{1}{3}}} \frac{\sqrt{3}}{\pi} Sc^{\frac{1}{3}} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} p^{\frac{1}{3}} \psi^{\frac{2}{3}} \delta(p) \cdot K_{\frac{1}{3}} \left(\frac{4}{3} Sc^{\frac{1}{3}} \psi^{\frac{2}{3}} p^{\frac{1}{3}}\right). \quad (3.10)$$

Le champ des concentrations sera l'original de cette expression. Il peut être obtenu à l'aide des formules suivantes :

$$F(p) G(p) = \int_0^t f(t-t') dg(t'), \quad (3.11)$$

lorsque :

$$F(p) = f(t) \quad \text{et} \quad G(p) = g(t).$$

Nous poserons :

$$G(p) = \delta(p), \quad (3.12)$$

d'où :

$$g(t) = \theta_p(t) = \theta_1(t, 0), \quad (3.13)$$

et :

$$F(p) = 2(\sqrt{\alpha}) p^{\frac{1}{3}} K_{\frac{1}{3}}[2(\sqrt{\alpha}) p^{\frac{1}{3}}] \quad (3.14)$$

avec:

$$\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^2 Sc \psi^{\frac{1}{3}}. \tag{3.15}$$

Nous savons que:

$$2\alpha^{\frac{1}{3}} p^{k+\frac{1}{3}} K_{2\mu}(2\alpha^{\frac{1}{3}} p^{\frac{1}{3}}) < t^{-k} \exp\left(-\frac{\alpha}{2t}\right) W_{k,\mu}\left(\frac{\alpha}{t}\right), \tag{3.16}$$

où $W_{k,\mu}$ est la fonction de Whittaker ([4], p. 505).

Pour calculer l'original $f(t)$ de la fonction $F(p)$ donnée par la formule (3.14), il faut poser, dans (3.16),

$$\mu = \frac{1}{6}, \tag{3.17}$$

et:

$$k = -\frac{1}{3}, \tag{3.18}$$

d'où:

$$f(t) = t^{\frac{1}{3}} e^{-\alpha/2t} W_{-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}}(\alpha/t). \tag{3.19}$$

Développons $W_{-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}}(\alpha/t)$ à l'aide des relations entre les fonctions hypergéométriques confluentes ([4] p. 505):

$$W_{k,\mu}(z) = e^{-z/2} z^{\frac{1}{2}+\mu} \mathcal{U}\left(\frac{1}{2} + \mu - k, 1 + 2\mu, z\right), \tag{3.20}$$

où:

$$\mathcal{U}(c, b, z) = \frac{\pi}{\sin \pi b} \left[\frac{\mathcal{M}(c, b, z)}{\Gamma(1 + c - b) \Gamma(b)} - z^{1-b} \frac{\mathcal{M}(1 + c - b, 2 - b, z)}{\Gamma(c) \Gamma(2 - b)} \right], \tag{3.21}$$

avec:

$$\mathcal{M}(e, f, z) = \frac{\Gamma(f)}{\Gamma(e)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(e+r)}{\Gamma(f+r)} \frac{z^r}{r!}. \tag{3.22}$$

On obtient enfin:

$$f(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \left[1 - \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-\alpha/t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha/t)^r}{\Gamma(\frac{4}{3} + r)} \right]. \tag{3.23}$$

L'expression (1.14) n'est autre que le quotient par $\Gamma(\frac{1}{3})$ de la fonction eulérienne incomplète de deuxième espèce $\Gamma(\frac{1}{3}, \alpha/t)$ dont la définition est ([4], p. 260):

$$\Gamma\left(\frac{1}{3}, z\right) = \int_z^{\infty} e^{-r} r^{-2/3} dr. \tag{3.24}$$

On peut écrire l'expression (3.10) sous la forme:

$$\mathcal{E}_1(p, \psi) = \frac{A}{2\sqrt{\alpha}} \delta(p) \cdot 2(\sqrt{\alpha}) p^{\frac{1}{3}} K_{\frac{1}{3}}(2\alpha^{\frac{1}{3}} p^{\frac{1}{3}}), \tag{3.25}$$

avec:

$$A = \frac{\Gamma(\frac{2}{3})(\sqrt{3})}{2^{\frac{1}{3}} \pi} Sc^{\frac{1}{3}} \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \psi^{\frac{1}{3}}. \tag{3.26}$$

D'où, en portant (3.13) et (3.23) dans (3.11):

$$\theta_1(t, \psi) = \int_0^t \frac{\Gamma[\frac{1}{3}, \alpha/(t-t')]}{\Gamma(\frac{1}{3})} d[\theta_p(t')] \tag{3.27}$$

expression qui vérifie bien les conditions aux limites,

$$\psi \rightarrow \infty, \quad \alpha \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \theta_1(t, \psi) \rightarrow 0$$

$$\text{puisque} \quad \Gamma\left(\frac{1}{3}, \alpha/(t-t')\right) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Cherchons une expression de $\theta_1(t, \psi)$ qui soit une fonctionnelle de $\theta_p(t)$. Intégrons par parties (3.27):

$$\theta_1(t, \psi) = \left[\frac{\theta_p(t') \Gamma\left(\frac{1}{3}, \alpha/(t-t')\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \right]^t - \int_0^t \frac{\theta_p(t')}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \cdot \frac{d}{dt'} [\Gamma\left(\frac{1}{3}, \alpha/(t-t')\right)] dt'. \quad (3.28)$$

$$\text{Comme on a pour } t' = 0, \quad \theta_p(t') = (\theta_p)_{x=0}, \quad (3.29)$$

$$\text{et lorsque } t' \rightarrow t, \alpha/(t-t') \rightarrow \infty, \Gamma\left(\frac{1}{3}, \alpha/(t-t')\right) \rightarrow 0 \quad (3.30)$$

il vient, compte tenu de la définition (3.24):

$$\theta_1(t, \psi) = -\frac{\theta_p(0) \Gamma\left(\frac{1}{3}, \alpha/t\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} + \left[\int_0^t \theta_p(t') e^{-\alpha/(t-t')} (t-t')^{-\frac{2}{3}} dt' \right] \frac{\alpha^{\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \quad (3.31)$$

avec:

$$\alpha = \left(\frac{2}{3}\right)^2 Sc \psi^{\frac{2}{3}}.$$

Le degré d'approximation numérique de la formule (3.31) est examiné dans les cas où les profils de concentration sont en similitude et ont pu être calculés d'une façon exacte.

4. CAS PARTICULIER DE PROFILS DE CONCENTRATION EN SIMILITUDE

Le cas le plus simple est celui d'une concentration constante à la paroi

$$\theta_1(t, 0) = \text{Cte.}$$

L'équation (1.18) et la définition de l'intégrale de Stieltjes conduisent à:

$$\frac{\theta_1(t, \psi)}{\theta_1(t, 0)} = 1 - e^{-\alpha/t} \left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\frac{2}{3}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha/t)^r}{\Gamma\left(\frac{4}{3} + r\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}, \alpha/t\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}. \quad (4.1)$$

L'expression $\theta_1(t, \psi)/\theta_1(t, 0)$ ne dépend que de α/t quelle que soit la forme du corps.

Les profils de concentration réduite $\theta_1(t, \psi)/\theta_1(t, 0)$ sont en similitude dans le plan (t, ψ) . En particulier, pour une plaque plane (sans gradient de pression), nous aurons:

$$t^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{2}{3}} (0,311)^{\frac{2}{3}} x_1^{\frac{2}{3}}, \quad (4.2)$$

d'où:

$$\frac{\alpha}{t} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 Sc \left(\frac{\psi}{t^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.3)$$

où encore :

$$\frac{\alpha}{t} = 0,596 Sc \left(\frac{\psi}{\sqrt{(2x^{(1)})}} \right)^{\frac{3}{2}} \tag{4.4}$$

$[\psi/\sqrt{(2x^{(1)})}]$ est une fonction de $\eta^{(1)} = [y^{(1)}/\sqrt{(2x^{(1)})}]$ définiet par :

$$\eta^{(1)} = \int_0^{\psi/\sqrt{(2x)}} \frac{d[\psi/\sqrt{(2x^{(1)})}]}{u_1} \tag{4.5}$$

avec [5]:

$$u_1^2 = P(z') \equiv z'^{\frac{2}{3}} e^{-z'} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{z'^r}{\Gamma(\frac{5}{3} + r)} \tag{4.6}$$

et:

$$z' = \left(\frac{2}{3} \right)^2 \frac{\psi^{\frac{3}{2}}}{t} = \frac{\alpha}{t \cdot Sc} = 0,425(\sqrt{2}) \left(\frac{\psi}{\sqrt{(2x^{(1)})}} \right)^{\frac{3}{2}} \tag{4.7}$$

La concentration réduite ne dépend que de $\eta^{(1)}$ et de Sc . Les profils de concentrations réduites sont donc, dans le cadre de la première approximation, en similitude dans le plan (x, y) .

Nous avons tracé sur la Fig. 1 les profils de concentrations réduites obtenus en fonction de différents nombres de Schmidt.

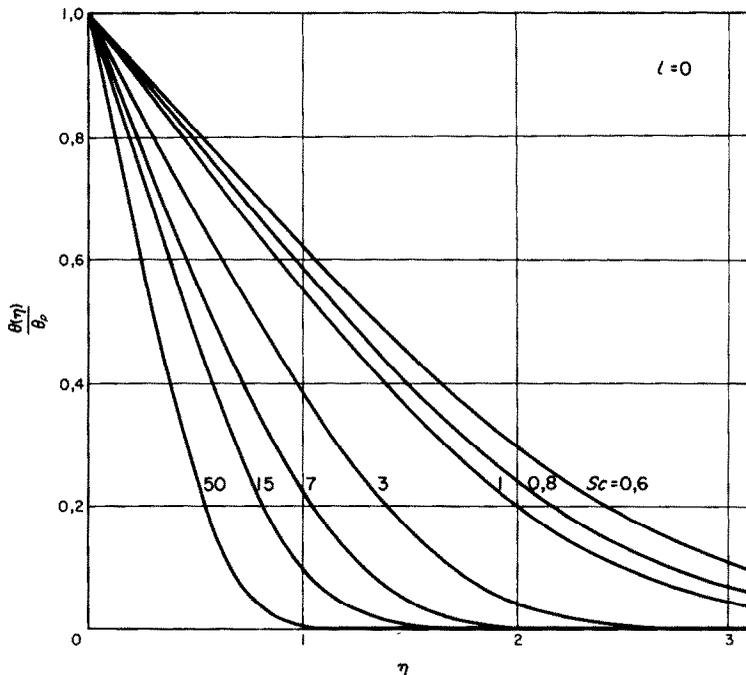


FIG. 1. Profils de concentrations réduites dans la couche limite sur une plaque plane pour différents nombres de Schmidt ($l = 0$).

† Les indices supérieurs sur les coordonnées indiquent l'ordre des transformations (2.19) et (2.20) utilisées pour revenir du plan auxiliaire (t, ψ) au plan physique (x, y) .

Calcul des profils de concentrations dans le cas d'une plaque plane avec distribution de concentrations pariétales réduites en puissance de l'abscisse

Soit maintenant :

$$\theta_p(x) = bx^l, \tag{4.8}$$

d'après (4.2), nous obtenons :

$$\theta_p(t) = b^*t^{4l/3}. \tag{4.9}$$

Portons (4.9) dans (3.31) :

$$\frac{\theta_1(t, \psi)}{b^*} = \frac{\alpha^{\frac{4}{3}}}{\Gamma(\frac{4}{3})} \int_0^t t^{4l/3} e^{-\alpha/(t-t')} (t-t')^{-\frac{4}{3}} dt'. \tag{4.10}$$

En posant $\beta = t/(t-t')$, et en utilisant (3.21) et :

$$\Gamma(c) \mathcal{U}(c, b, z) = e^z \int_1^\infty e^{-z\beta} (\beta-1)^{c-1} \beta^{b-c-1} d\beta, \tag{4.11}$$

nous obtenons :

$$\frac{\theta_1(t, \psi)}{\theta_1(t, 0)} = - \frac{e^{-\alpha/t} \Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(2 + \frac{4}{3}l - \frac{4}{3})} \left[\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\frac{4}{3}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \frac{4}{3}l + r)}{\Gamma(\frac{4}{3} + r)} \cdot \frac{(\alpha/t)^r}{r} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2 + \frac{4}{3}l - \frac{4}{3} + r)}{\Gamma(\frac{2}{3} + r)} \frac{(\alpha/t)^r}{r!} \right]. \tag{4.12}$$

Nous voyons que cette solution ne dépend que de α/t , c'est-à-dire de $\eta^{(1)}$ et de Sc .

Les Fig. 2 à 5 donnent les profils des concentrations réduites dans la couche limite pour différentes valeurs de l et de Sc .

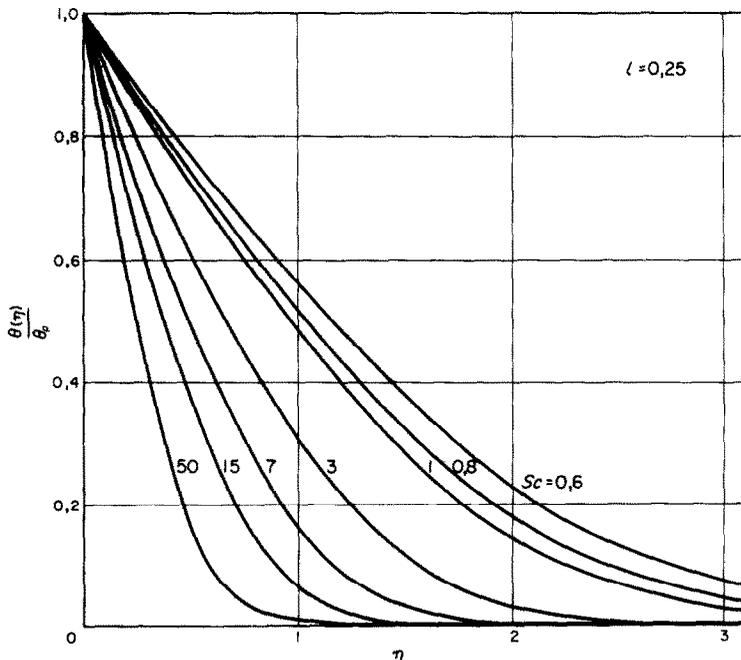


FIG. 2. Profils de concentrations réduites dans la couche limite sur une plaque plane pour différents nombres de Schmidt ($l = 0.25$).

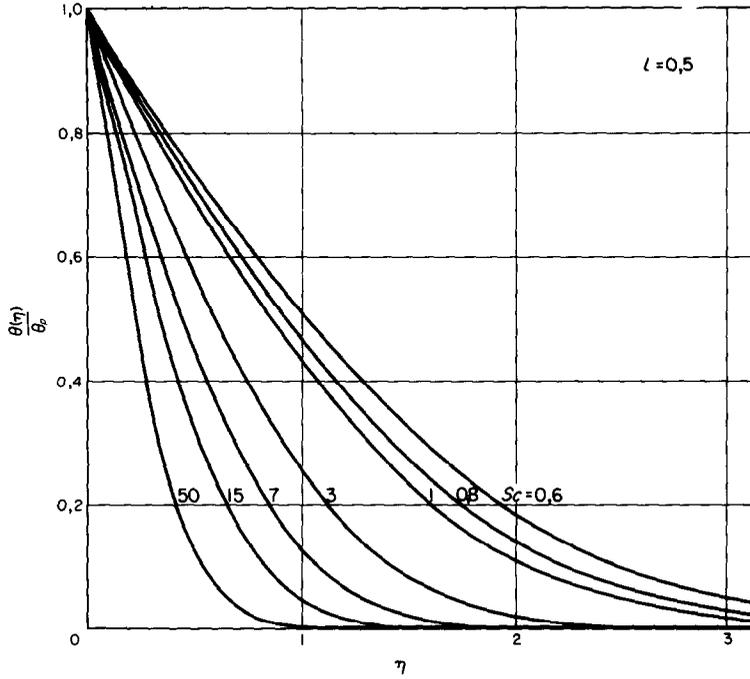


FIG. 3. Profils de concentrations réduites dans la couche limite sur une plaque pour différents nombres de Schmidt ($l = 0,50$).

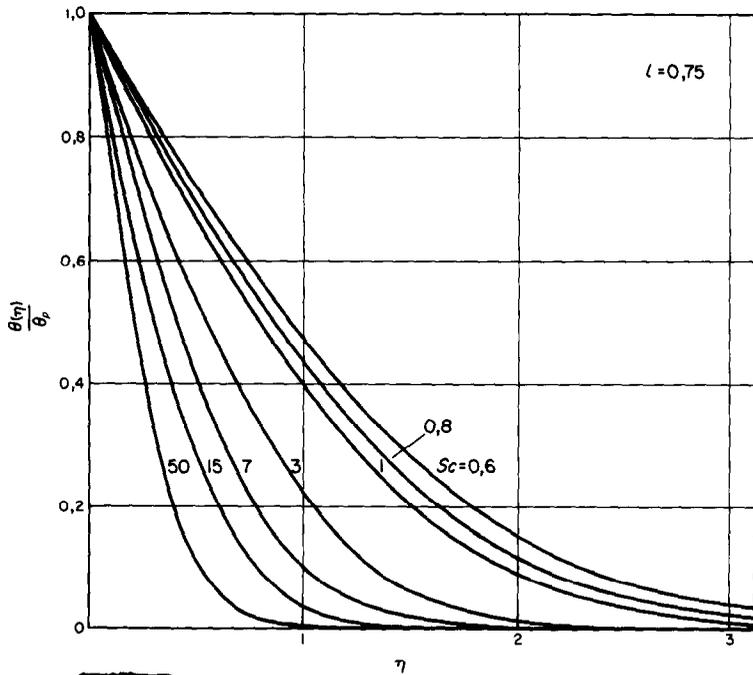


FIG. 4. Profils de concentrations réduites dans la couche limite sur une plaque plane pour différents nombres de Schmidt ($l = 0,75$).

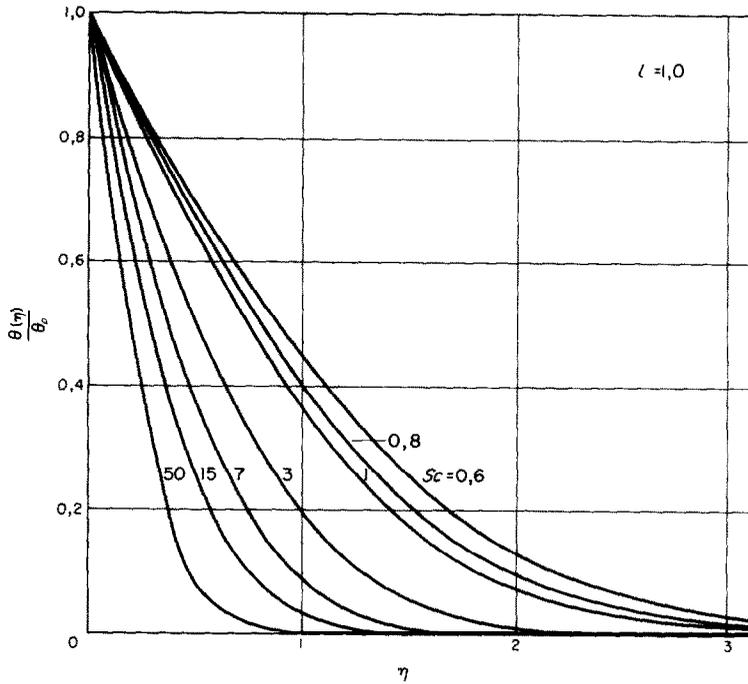


FIG. 5. Profils de concentrations réduites dans la couche limite sur une plaque plane pour différents nombres de Schmidt ($l = 1,00$).

5. CAS D'UNE REACTION DU PREMIER ORDRE A LA PAROI SUR UNE PLAQUE PLANE

Un développement limité au voisinage de la paroi de l'expression (3.27) nous donne :

$$\varphi_{p1}(t) = \frac{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}} Sc^{-\frac{2}{3}}}{\Gamma(\frac{2}{3})} [\tau_{p1}(t)]^{\frac{2}{3}} \int_0^t (t-t')^{-\frac{1}{3}} d(a_p(t')) \quad (5.1)$$

ou la relation inverse :

$$\theta_{p1}(t) = \frac{Sc^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}} \Gamma(\frac{2}{3})} \int_0^t (t-t')^{-\frac{2}{3}} \frac{\varphi_{p1}(t')}{[\tau_{p1}(t')]^{\frac{2}{3}}} dt'. \quad (5.2)$$

La connaissance de la loi cinétique à la paroi $\varphi_p(a_p)$ permettra de calculer la concentration pariétale par la résolution d'une équation intégrale.

Dans le cas d'une réaction catalytique du premier ordre, on montre que le seul paramètre qui intervient est le produit du nombre de Damköhler par le nombre de Schmidt à la puissance deux tiers soit :

$$a_{p1}(x) = 1 - \frac{(Da Sc^{\frac{2}{3}})}{3^{\frac{1}{3}} \Gamma(\frac{2}{3})} \int_0^x \left[\int_{x'}^x (\tau_{p1}(x''))^{\frac{2}{3}} dx'' \right]^{-\frac{2}{3}} a_{p1}(x') dx'. \quad (5.3)$$

En particulier, deux problèmes admettront la même solution pariétale en variables réduites, si le produit $Da \cdot Sc^{\frac{2}{3}}$ est le même.

Dans le cas d'une plaque plane, la tension de frottement pariétale obtenue à partir de (2.22) est, sous forme non-dimensionnelle :

$$\tau_{p1} = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{0,311}{\sqrt{x}}. \tag{5.4}$$

Portons cette expression dans (5.3) et intégrons :

$$\int_{x'}^x [\tau_{p1}(x'')]^{\frac{1}{2}} dx'',$$

il vient :

$$a_{p1}(x) = 1 - \frac{E}{4\Gamma(\frac{4}{3}) \Gamma(\frac{2}{3})} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \int_0^x \left[1 - \left(\frac{x'}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} a_{p1}(x') dx' \tag{5.5}$$

où :

$$E = \frac{12^{\frac{1}{2}}}{(0,311)^{\frac{1}{2}}} \Gamma(\frac{4}{3}) Da Sc^{\frac{1}{2}}.$$

L'équation précédente est une intégrale de Volterra de seconde espèce que nous avons résolue par la méthode classique. Le résultat est une série de la forme (5.7) uniformément convergente [6], quel que soit le paramètre :

$$\lambda = - \frac{B}{4\Gamma(\frac{4}{3}) \Gamma(\frac{2}{3})} \tag{5.6}$$

$$a_{p1}(x) = a_{p1}^0(x) + \lambda a_{p1}^{(1)}(x) + \dots + \lambda^n a_{p1}^{(n)}(x) + \dots ; \tag{5.7}$$

en identifiant terme à terme les coefficients en λ^n de la série (5.7) portée dans (5.4), on obtient :

$$a_{p1}^{(n)}(x) = \int_0^x x^{-\frac{1}{2}} \left[1 - \left(\frac{x'}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot a_{p1}^{(n-1)}(x') dx' \tag{5.8}$$

d'où :

$$a_{p1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x), \tag{5.9}$$

avec :

$$\alpha_n(x) = (-1)^n \left(\frac{3E}{2\Gamma(\frac{2}{3})} \right)^n \frac{\Gamma(\frac{2}{3}(n+1)) x^{n/2}}{\Gamma(\frac{2}{3}) n!}. \tag{5.10}$$

L'examen de cette série montre que toutes les distributions de concentrations pariétales réduites peuvent se déduire les unes des autres. En effet, si l'on pose :

$$Z' = E\sqrt{x} \tag{5.11}$$

on a :

$$\alpha_n(Z') = (-1)^n \left[\frac{3}{2\Gamma(\frac{2}{3})} \right]^n \cdot \frac{\Gamma(\frac{2}{3}(n+1))}{\Gamma(\frac{2}{3})} \cdot \frac{Z'^n}{n!}$$

et :

$$a_{p1}(Z') = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(Z'). \tag{5.12}$$

Nous avons tracé sur la Fig. 6, $a_{p1}(Z')$ en fonction de Z' . La courbe prend la valeur 1 pour $Z' = 0$ et tend asymptotiquement vers 0 quand Z' tend vers l'infini. A l'origine des abscisses, la concentration pariétale est égale à la valeur à l'infini et elle tend vers la concentration d'équilibre, lorsque x croît indéfiniment.

Chambré et Acrivos [7] sont arrivés à un résultat semblable par une autre méthode, qui suppose que le nombre de Schmidt est suffisamment grand, et qui utilise à la place de (5.4) la valeur exacte de la tension de frottement pariétale $\tau_p = 0,332 x^{-\frac{1}{2}}$. Nous discuterons la validité de la première approximation en la comparant avec les résultats de la deuxième approximation, et nous comparerons ce résultat avec les points expérimentaux de l'analogie thermique (paragraphe 8).

Portons la valeur de x , tirée de (4.2), dans la série (5.10), nous obtenons :

$$\theta_1(t, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n t^{2n/3} \tag{5.13}$$

et portons (5.13) dans (3.31) :

$$\theta_1(t, \psi) = \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n t^{2n/3} e^{-\alpha/(t-t')} (t-t')^{-\frac{2}{3}} dt' \tag{5.14}$$

Intervertissons le signe somme de la série et de l'intégrale puisqu'elles sont uniformément convergentes.

Il vient :

$$\theta_1(t, \psi) = \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n \int_0^t t'^{2n/3} e^{-\alpha/(t-t')} (t-t')^{-\frac{2}{3}} dt' \tag{5.15}$$

Posons :

$$u = \frac{t}{t-t'} \tag{5.16}$$

il vient :

$$\theta_1(t, \psi) = \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n t^{2n-\frac{1}{3}} \int_1^{\infty} (u-1)^{2n/3} e^{-\alpha u/t} u^{-2(n+1)/3} du \tag{5.17}$$

Si l'on utilise (5.4), l'expression (5.15) devient :

$$\theta_1(t, \psi) = \frac{\alpha^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})} e^{-\alpha/t} t^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n C_n t^{2n/3} \Gamma\left(1 + \frac{2n}{3}\right) \mathcal{U}\left(1 + \frac{2n}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\alpha}{t}\right) \tag{5.18}$$

soit, en développant avec les formules (3.21) et (3.22) :

$$\theta_1(t, \psi) = e^{-\alpha/t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{C_n t^{2n/3}}{\Gamma(2n/3 + \frac{2}{3})} \left[\left(\frac{\alpha}{t}\right)^{\frac{1}{3}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + 2n/3 + r)}{\Gamma(\frac{4}{3} + r)} \cdot \frac{(\alpha/t)^r}{r!} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n/3 + \frac{2}{3} + r)}{\Gamma(\frac{2}{3} + r)} \cdot \frac{(\alpha/t)^r}{r!}\right] \tag{5.18}$$

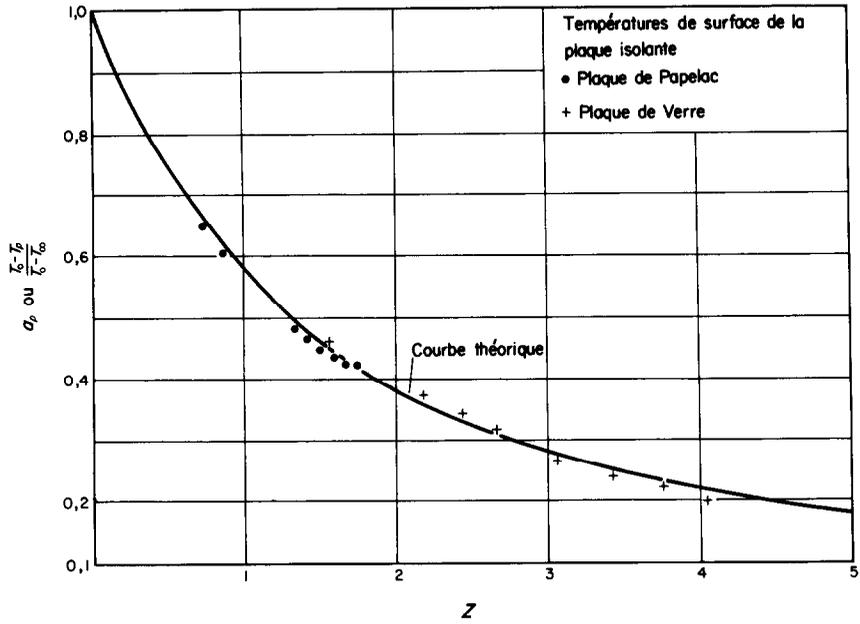


FIG. 6. Distribution de concentrations ou de températures réduites sur une plaque plane entièrement catalytique.

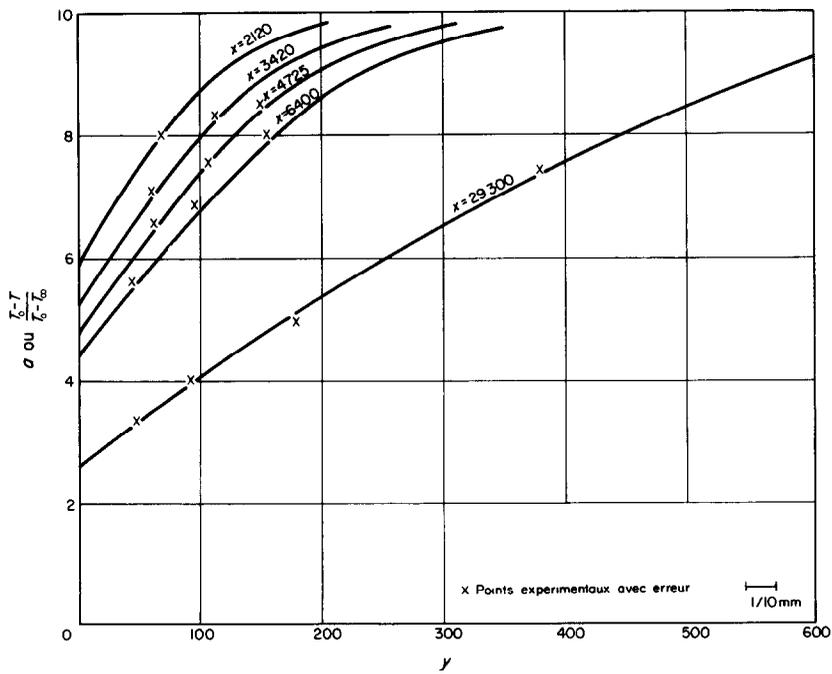


FIG. 7. Profils de concentrations ou de températures réduites dans la couche limite sur une plaque plane entièrement catalytique.

Sur la Fig. 7, nous avons porté a , en fonction de $y^{(1)}$ pour différentes valeurs de $x^{(1)}$ et pour $Da = 8.10^{-3}$, $Sc = 0.7$, ainsi que les points expérimentaux obtenus par l'analogie thermique (paragraphe 8).

Compte tenu de l'erreur systématique due à la première approximation et des erreurs expérimentales, les calculs théoriques sont assez bien vérifiés par l'expérience.

6. ETUDE D'UN "SILLAGE" CATALYTIQUE

Supposons une réaction catalytique s'effectuant dans une région dont tous les points sont au plus à une distance L du bord d'attaque, c'est-à-dire que le flux de masse est nul en tout point x d'abscisse supérieure à L .

L'intégrale (5.2) se décompose en deux parties, de 0 à L et de L à x ; la deuxième étant nulle puisque dans cet intervalle $\varphi_p = 0$.

En posant :

$$\frac{x}{L} = \xi \tag{6.1}$$

pour x supérieur à L , on a :

$$a_{p1}(x) = 1 - \frac{E\sqrt{L}}{4\Gamma(\frac{4}{3})\Gamma(\frac{2}{3})} \left(\frac{L}{x}\right)^{\frac{2}{3}} \int_0^1 \left[1 - \left(\frac{\xi'}{x}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{2}{3}} a_{p1}(\xi') d\xi' \tag{6.2}$$

où $a_{p1}(\xi)$ est défini à partir de (5.10) soit :

$$a_{p1}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{E\sqrt{L}}{\Gamma(\frac{2}{3})}\right]^n \frac{1}{\Gamma(\frac{2}{3})} \frac{\Gamma[\frac{2}{3}n + 1]}{n!} \xi^{n/2}. \tag{6.3}$$

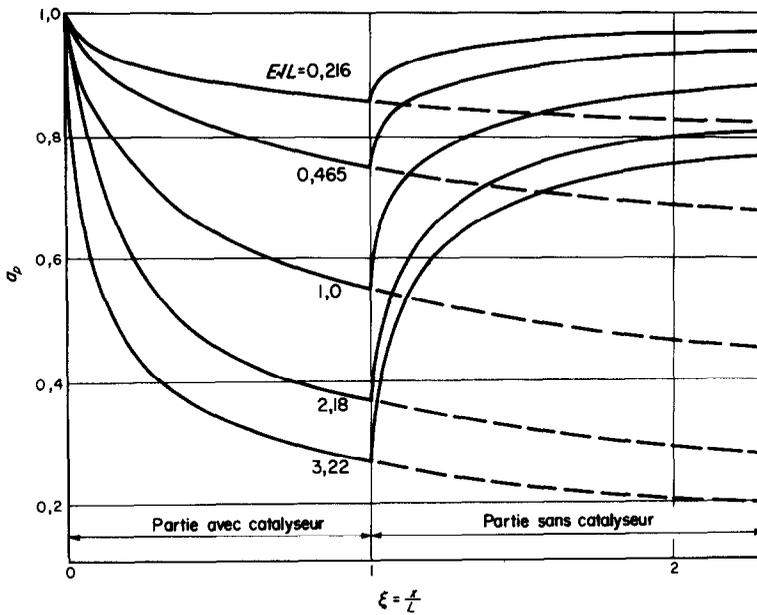


FIG. 8. Distributions de concentrations ou de températures réduites sur une plaque plane avec partie arrière non catalytique pour différentes valeurs de $E\sqrt{L}$.

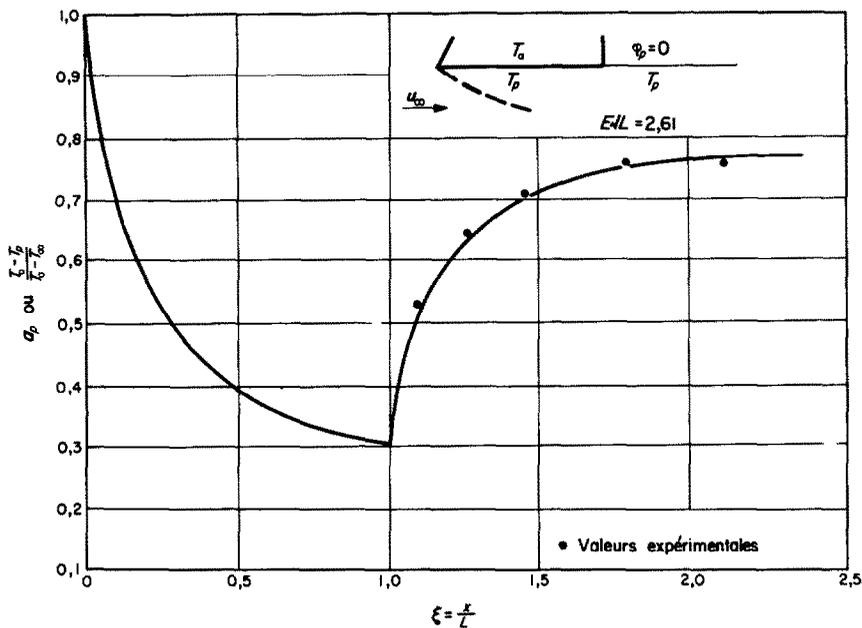


FIG. 9. Distribution de concentrations ou de températures réduites sur une plaque plane avec partie arrière non catalytique [$E/L = 2,61$].

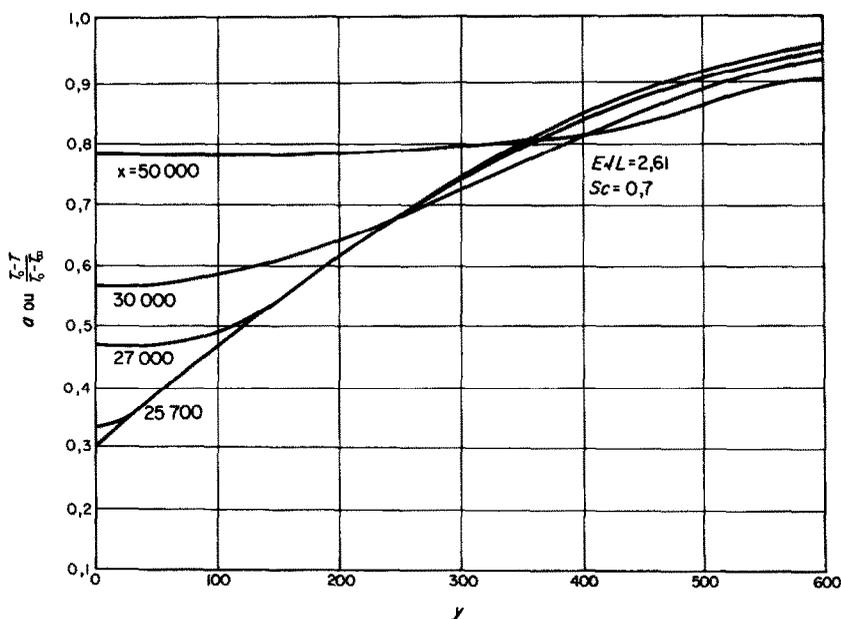


FIG. 10. Profils de concentrations ou de températures réduites dans la couche limite sur une plaque plane avec partie arrière non catalytique [$E/L = 2,61$].

La solution du problème se réduit à l'intégration entre $\xi' = 0$ et $\xi' = 1$ du produit du développement limité $[1 - (\xi' L/x)^2]^{-3/2}$ par $a_{p1}(\xi')$.

Les résultats donnant $a_{p1}(\xi)$ sont présentés pour différentes valeurs de $E\sqrt{L}$ sur la Fig. 8. En portant cette valeur de $a_{p1}(\xi)$ dans (3.31), nous obtenons les profils dans la couche limite avec les paramètres de l'analogie thermique, (Fig. 9 et Fig. 10).

7. DIFFERENTS TYPES DE DISCONTINUITES DE CATALYSEUR

Supposons que la paroi soit d'abord non catalytique, c'est-à-dire $\varphi_p = 0$, puis catalytique.

Nous avons résolu cette sorte de discontinuité en intégrant pas à pas l'équation intégrale (5.2) de la même façon que Chung, Liu et Mirels [8]. Nous obtenons les courbes de la Fig. 11. En portant

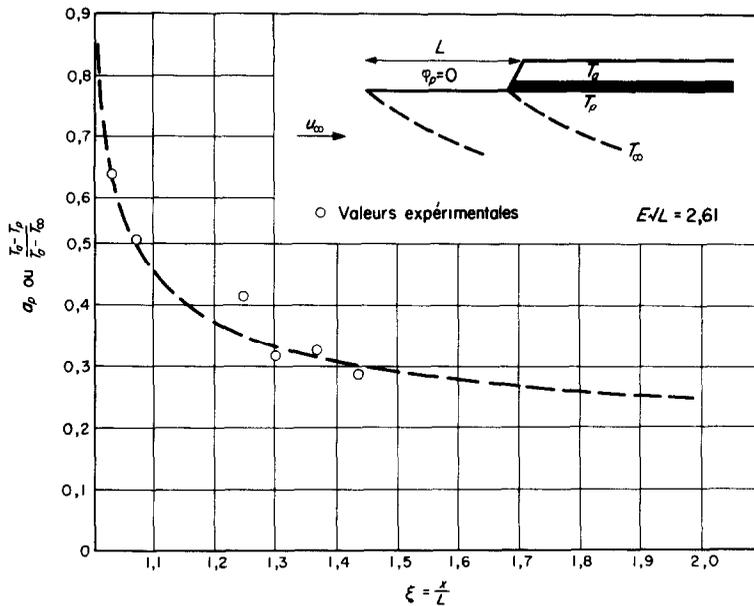


FIG. 11. Distribution de concentrations ou de températures réduites sur une plaque plane avec partie avant non catalytique [$E\sqrt{L} = 2,6$].

les valeurs de $\theta_{p1}(t)$ dans l'équation (3.31), on obtient pour $Da = 8.10^{-3}$ et $Sc = 0,7$ (conditions d'analogie thermique) les profils de la fig. 12 derrière une discontinuité d'abscisse $L = 20\ 550$.

Supposons maintenant que l'on ait sur une plaque catalytique une interruption, puis une reprise de la catalyse. Nous aurons pour solution, des courbes $a_p(x)$ du type de celle de la Fig. 13.

Pour une valeur suffisamment grande de $E\sqrt{L}$ et pour une distance assez grande du bord d'attaque, on trouve que l'on peut augmenter ainsi le flux de masse par unité de surface. Ce résultat a été obtenu (Fig. 13) en comparant les aires S_1 et S_2 pour $E\sqrt{L} = 8$. Il est dû au changement brutal de pente de la courbe $a_p(x)$ à l'endroit de la discontinuité.

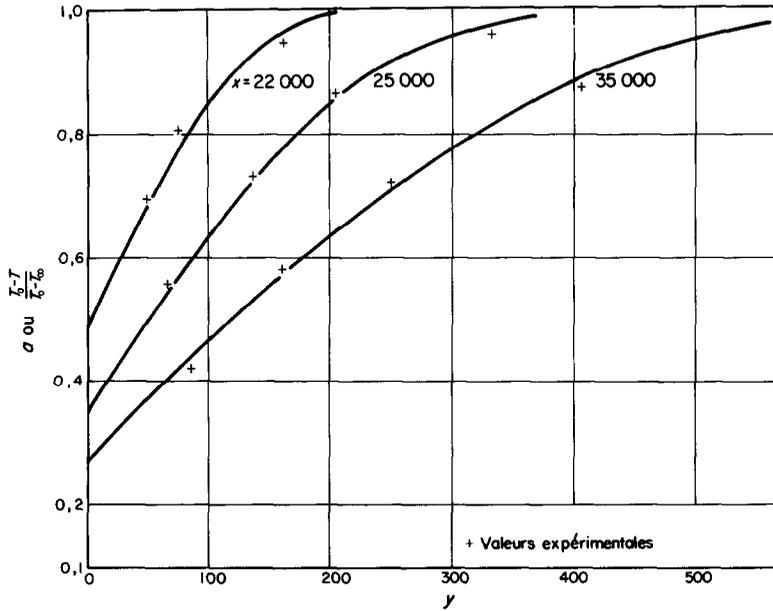


FIG. 12. Profils de concentrations ou de températures réduites dans la couche limite sur une plaque plane avec partie avant non catalytique [$E\sqrt{L} = 2,61$].

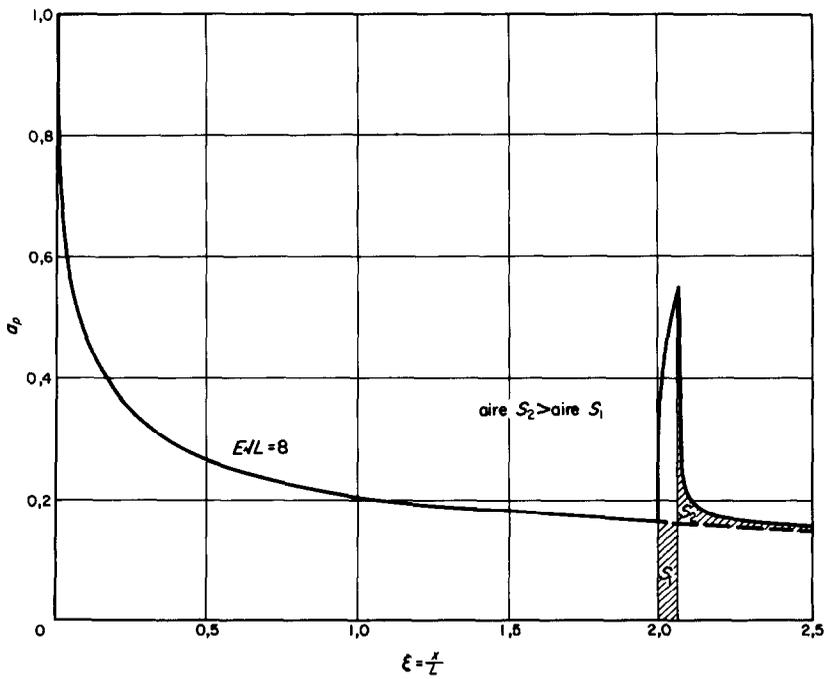


FIG. 13. Exemple de distribution de concentrations réduites sur une plaque plane avec interruption de catalyseur de largeur finie.

8. ANALOGIE THERMIQUE DU PHENOMENE DE DIFFUSION AVEC CATALYSE A LA PAROI

Nous obtiendrons une équation différentielle identique dans sa forme et dans ses conditions aux limites en plaçant dans un courant d'air laminaire, une plaque plane P maintenue à une température uniforme T_a et recouverte d'une feuille isolante, d'épaisseur l et de conductivité thermique λ_i . L'équation de la couche limite thermique dans ce cas s'écrit :

$$\rho u \frac{\partial}{\partial x} (c_p T) + \rho v \frac{\partial}{\partial y} (c_p T) = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2. \quad (8.1)$$

Dans le deuxième membre, $u \partial p / \partial x$ est petit devant $\partial / \partial y (\lambda \partial T / \partial y)$, puisque le gradient de pression est pratiquement nul. De même, $\mu (\partial u / \partial y)^2$, terme dû au frottement visqueux est négligeable devant $\partial / \partial y (\lambda \partial T / \partial y)$ puisque les vitesses sont faibles.

En supposant que les propriétés physiques du fluide sont constantes, l'équation (8.1) devient :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\mu c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (8.2)$$

Choisissons, comme condition à la paroi, une condition du type de Fourier :

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} = \lambda_i \frac{T_a - T(x, 0)}{e}. \quad (8.3)$$

En comparant les équations (1.13) et (8.2) et leurs conditions à la paroi (1.14) et (8.3), nous voyons qu'elles se déduisent respectivement l'une de l'autre en remplaçant :

$$\left. \begin{array}{l} a \quad \text{par} \quad \frac{T_a - T(x, y)}{T_a - T_\infty} = T^* \\ Sc \quad \text{par} \quad Pr \\ Da \quad \text{par} \quad Da_T = \frac{\lambda_i}{\rho c_p l \cdot u_\infty} \end{array} \right\} \quad (8.4)$$

A la variable Z' définie par l'équation (5.11), correspond la nouvelle variable Z'_T , définie par :

$$Z'_T = \frac{1}{0,339} Da_T Pr^{\frac{1}{3}} \sqrt{x} \quad (8.5)$$

où le nombre de Schmidt a été remplacé par le nombre de Prandtl.

La correspondance entre a_p et Z' sera identique à celle de T_p^* et Z'_T , puisque ces variables réduites obéissent à la même équation intégrale.

Pour mesurer la température de paroi au contact du fluide, nous avons employé la méthode Thureau [9] que nous rappelons brièvement. Un sulfure mixte de zinc, de cadmium, de manganèse et d'or, excité par un rayonnement ultra violet, émet un spectre dont la forme dépend de la température.

En mesurant les intensités lumineuses I_{λ_1} et I_{λ_2} pour deux longueurs d'onde particulières λ_1 et λ_2 , avec une même puissance de la lampe, nous obtiendrons la température grâce au rapport de ces intensités.

Les résultats numériques obtenus sont confrontés avec les valeurs théoriques précédemment calculées.

9. DEUXIEME APPROXIMATION POUR LES PROFILS DE VITESSE

9.1. Dans le cas de l'équation de la quantité de mouvement, l'approximation d'ordre $i + 1$ sera solution de l'équation suivante :

$$\frac{\partial Z_{i+1}}{\partial t} - \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 Z_{i+1}}{\partial \psi^2} = \left[\frac{u_i}{(2\tau_{pi})^{\frac{1}{2}}} - \psi^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial^2 Z_i}{\partial \psi^2}. \tag{9.1}$$

La deuxième approximation $Z_2(t, \psi)$ sera donc solution de l'équation :

$$\frac{\partial Z_2}{\partial t} - \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial \psi^2} = \left[\frac{u_1}{(2\tau_{p1})^{\frac{1}{2}}} - \psi^{\frac{1}{2}} \right] \frac{\partial^2 Z_1}{\partial \psi^2}, \tag{9.2}$$

avec les conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} Z_2(t, \psi) &= 0, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} Z_2(t, \psi) &= u_e^2(t), \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} Z_2(t, \psi) &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{9.3}$$

Pour revenir au plan physique (x, y) , on emploiera la transformation :

$$x = x^{(2)}(t, \psi) = \int_0^t \frac{\partial t}{(2\tau_{p2})^{\frac{1}{2}}}, \tag{9.4}$$

$$y = y^{(2)}(t, \psi) = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{u_2}. \tag{9.5}$$

Remarquons que la condition imposée à la paroi pour la fonction $Z_2(t, \psi)$ ne fait pas intervenir la même fonction $u_e^2(t)$, que celle introduite dans la première approximation car le retour du plan auxiliaire (t, ψ) au plan physique se fait d'une façon différente (cf. Fig. 14).

9.2. Pour résoudre l'équation (9.2), cherchons une expression de la vitesse $u_1(t, \psi)$ sous la forme d'une série en $\psi^{n/2}$ ([10], p. 31) :

$$u_1(t, \psi) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t) \psi^{n/2}. \tag{9.6}$$

Nous savons que $Z_1 = u_e^2 - u_1^2$ est solution de l'équation :

$$\frac{\partial Z_1}{\partial t} - \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 Z_1}{\partial t^2} = 0. \tag{9.7}$$

Posons :

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(t) \psi^{n/2}. \tag{9.8}$$

Si l'on porte le développement en série de Z_1 dans l'équation (9.7), on trouve que les b_n satisfont à la relation de récurrence suivante :

$$\frac{4}{n(n-2)} \cdot \frac{d(b_{n-3})}{dt} = b_n. \tag{9.9}$$

Compte tenu des conditions aux limites, on obtient :

$$b_0 = u_e^2(t), \quad b_1 = 0, \quad b_2 = -2\tau_{p1}(t) \quad (9.10)$$

d'où :

$$b_{3i} = \frac{2^{2i}}{3^i i! \prod_{r=1}^i (3r-2)} \cdot \frac{d^i(u_e^2)}{dt^i}, \quad (9.11)$$

$$b_{3i+1} = 0,$$

$$b_{3i+2} = \frac{2^{i+1}}{3^i i! \prod_{r=1}^i (3r+2)} \cdot \frac{d^i(\tau_{p1})}{dt^i}.$$

D'après la définition de Z_1 , nous avons :

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \psi^{n/2} = - \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi^{n/2} \right]^2. \quad (9.12)$$

En identifiant terme à terme, nous obtenons :

$$d_n = -\frac{b_{n+1}}{2d_1} - \frac{1}{2d_1} \sum_1^{n-2} d_{p+1} d_{n-p} \quad n \geq 3 \quad (9.13)$$

avec :

$$d_1 = \sqrt{2\tau_{p1}}, \quad d_2 = -\frac{b_3}{2d_1} = -\frac{1}{3} \left(\frac{2}{\tau_{p1}} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d(u_e^2)}{dt}. \quad (9.14)$$

Portons (9.13) dans (9.2), le terme $[u_i/\sqrt{2\tau_{p1}}] - \psi^{\frac{1}{2}}$ devient :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{n+1}}{d_1} \psi^{(n+1)/2}. \quad (9.15)$$

Posons :

$$\gamma_n(t) = \frac{d_{n+1}(t)}{d_1} = -\frac{b_{n+2}}{2d_1^2} - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n-1} \gamma_p \gamma_{n-p} \quad (9.16)$$

avec :

$$\gamma_1 = -\frac{1}{3\tau} \frac{d(u_e^2)}{dt}. \quad (9.17)$$

L'équation (9.2) devient, compte tenu de l'équation de la première approximation :

$$\frac{\partial Z_2}{\partial t} - \psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 Z_2}{\partial \psi^2} = \frac{\partial Z_1}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t_1) \psi^{n/2}. \quad (9.18)$$

Utilisons, comme dans la première approximation, la transformation de Carson et posons :

$$\mathcal{Z}_1(p, \psi) \subset Z_1(t, \psi), \tag{9.19}$$

$$\mathcal{Z}_2(p, \psi) \subset Z_2(t, \psi), \tag{9.20}$$

et :

$$p\gamma_n(p) \subset c_n(t). \tag{9.21}$$

Utilisons à présent le théorème de Poli [11] :

$$\frac{1}{t} f(t) G(t) \subset p \int_p^\infty F(\lambda) g(\lambda - p) \frac{d\lambda}{\lambda}, \tag{9.22}$$

avec :

$$F(p) \subset f(t) \quad \text{et} \quad G(p) \subset g(t). \tag{9.23}$$

On a ici :

$$f(t) = \frac{\partial \mathcal{Z}_1}{\partial t} \quad \text{et} \quad g(t) = c_n(t). \tag{9.24}$$

Donc :

$$\frac{\partial Z_1}{\partial t} \sum_{n=1}^\infty \gamma_n(t) \psi^{n/2} \supset p \sum_{n=1}^\infty \psi^{n/2} \int_p^\infty c_n(\lambda - p) \mathcal{Z}_1(\lambda, \psi) d\lambda. \tag{9.25}$$

Si l'on pose, comme dans la première approximation :

$$q = \frac{4}{3} p^{\frac{2}{3}} \psi^{\frac{1}{3}} \tag{9.26}$$

et :

$$Q_2(p, q) = q^{-\frac{3}{2}} \mathcal{Z}_2(p, \psi). \tag{9.27}$$

On obtient l'équation :

$$\frac{\partial^2 Q_2}{\partial q^2} + \frac{1}{q} \frac{\partial Q_2}{\partial q} - \left(1 + \frac{4}{9q^2}\right) Q_2 = G_2(p, q). \tag{9.28}$$

On montre que :

$$G_2(p, q) = -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{3}{2}}\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) p^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} p^{-n/3} q^{2n/3} \int_0^\infty \lambda^{\frac{1}{3}} \xi(\lambda) c_n(\lambda - p) K_{\frac{2}{3}}\left(q \frac{\lambda^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}}\right) d\lambda, \tag{9.29}$$

où :

$$\xi(p) \subset u_c^2(t). \tag{9.30}$$

L'équation (9.28) se résout par la méthode de variation des constantes en tenant compte des conditions aux limites (9.3) transformées convenablement. Les détails de l'intégration sont donnés dans la référence ([10], p. 33).

Nous n'avons pas réussi à obtenir l'original de la solution $\mathcal{Z}_2(p, \psi)$, mais un développement en série de cette solution au voisinage de la paroi nous a fourni une relation entre la contrainte

tangentielle pariétale τ_{p2} de la deuxième approximation et la distribution de vitesse u_e à l'extérieur de la couche limite :

$$\begin{aligned} \tau_{p2}(t) &= \frac{1}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{3}} \Gamma(\frac{2}{3})} \int_0^t (t-t')^{-\frac{2}{3}} d[u_e^2(t')] - \frac{3^{\frac{1}{3}} \Gamma(\frac{1}{3})}{2^{\frac{2}{3}} \pi \Gamma(\frac{2}{3})} \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \cdot \frac{\Gamma(n/3 + 1 + r)}{\Gamma(2n/3 + 2 + r)} \cdot \frac{d^r \gamma_n(t)}{dt^r} \\ &\int_0^t (t-t')^{n/3+r-\frac{2}{3}} d[u_e^2(t')]. \end{aligned} \tag{9.31}$$

C'est une équation intégrale sous forme paramétrique, car on passe de la variable t à la variable x par la relation (9.4). Remarquons que l'équation est différente de celle de la référence ([10], p. 36).

Dans le cas de la plaque plane ($u_e = Cte$) l'équation intégrale (9.31) s'intègre facilement et l'on trouve que :

$$C_{f2} Re_x^{-\frac{1}{2}} = 0,66107 \tag{9.32}$$

où :

$$\frac{C_{f2}}{2} = \tau_{p2}^* \tag{9.33}$$

On voit que l'erreur par rapport à la valeur exacte 0,66412 est de l'ordre de 0,4 pour cent.

La première approximation avait donné :

$$C_{f1} Re_x^{-\frac{1}{2}} = 0,62340 \tag{9.34}$$

d'où une erreur par défaut de 6,1 pour cent.

Remarquons que la deuxième approximation exposée dans la référence [10] conduisait à une valeur de 0,67415, c'est-à-dire avec une erreur par excès de 1,5 pour cent.

En conclusion, le nouveau processus d'intégration des équations de la couche limite laminaire par approximations successives exposé ci-dessus, non seulement est plus logique au point de vue formalisme que celui de la référence [10], mais conduit à une convergence numérique plus rapide.

Pour le calcul des profils de vitesse, on peut, à la place des profils exacts de la deuxième approximation, ajuster les profils obtenus dans le cadre de la première approximation [5] en faisant une affinité dans le plan (t, ψ) , de telle façon que la contrainte tangentielle pariétale correspondant à ces nouveaux profils soit égale à τ_{p2} .

Dans le cas de la plaque plane, on a donc remplacé $u_1(t, \psi)$, tel qu'il est donné, par (4.6) et (4.7), par :

$$\tilde{u}(t, \psi) = [P(\varepsilon, z')]^{\frac{1}{2}} \tag{9.35}$$

avec :

$$\varepsilon = \frac{\tau_{p2}}{\tau_{p1}} = 1,061. \tag{9.36}$$

On trouve ainsi que le profil des vitesses réduites est une fonction d'une nouvelle variable réduite :

$$\tilde{\eta} = \int_0^{\psi} \frac{d[\psi/\sqrt{(2x_2)}]}{\tilde{u}} \tag{9.37}$$

Il concorde, à moins de 1 pour cent près, avec le profil calculé par Blasius, comme on l'a montré dans la référence [5].

10. DEUXIEME APPROXIMATION POUR LES PROFILS DE CONCENTRATIONS

Dans le chapitre 2, nous avons montré que l'approximation d'ordre $i + 1$ de la concentration est solution de l'équation :

$$\frac{\partial a_{i+1}}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\pm} \frac{\partial a_{i+1}}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u_i}{(2\tau_{pi})^{\pm}} - \psi^{\pm} \right) \frac{\partial a_i}{\partial \psi} \right], \tag{10.1}$$

où u_i , τ_{pi} et a_i sont respectivement la vitesse, la contrainte à la paroi et la concentration, à l'approximation d'ordre i dans le plan (t, ψ) .

Pour la deuxième approximation, nous aurons donc :

$$\frac{\partial a_2}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\pm} \frac{\partial a_2}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u_i}{(2\tau_{pi})^{\pm}} - \psi^{\pm} \right) \frac{\partial a_1}{\partial \psi} \right]. \tag{10.2}$$

Posons :

$$\theta_2 = a_2 - 1 \tag{10.3}$$

nous obtenons :

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\pm} \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\left(\frac{u_i}{(2\tau_{pi})^{\pm}} - \psi^{\pm} \right) \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi} \right] \tag{10.4}$$

avec comme conditions aux limites, lorsque la concentration pariétale est imposée :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow 0} \theta_2(t, \psi) &= 0, \\ \lim_{\psi \rightarrow 0} \theta_2(t, \psi) &= 0, \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} \theta_2(t, \psi) &= \theta_p(t). \end{aligned} \right\} \tag{10.5}$$

Le cas d'une densité pariétale de flux de masse imposée, ou celui d'une relation† entre cette densité de flux et la concentration pariétale se traite d'une façon analogue en modifiant la dernière condition du système (10.5).

Compte tenu de la définition des γ_n [voir (9.10) et (9.17)] l'équation (10.4) devient :

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial t} - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\pm} \frac{\partial \theta_2}{\partial \psi} \right) = \frac{1}{Sc} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(t) \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{(n+1)/2} \frac{\partial \theta_1}{\partial \psi} \right). \tag{10.6}$$

Utilisons la transformation de Carson et posons :

$$\mathcal{C}_1(p, \psi) = \theta_1(t, \psi), \tag{10.7}$$

et :

$$\mathcal{C}_2(p, \psi) = \theta_2(t, \psi). \tag{10.8}$$

† On peut faire la même remarque qu'au paragraphe 8.1 sur la condition imposée à la paroi à la fonction $\theta_2(t, \psi)$. Il faut alors remplacer sur la Fig. 14 l'axe des u_p^2 par un axe des θ_p .

Comme précédemment, le théorème de Poli conduit à l'équation à laquelle obéit la transformée $\mathcal{C}_2(p, \psi)$ de $\theta_2(t, \psi)$:

$$p\mathcal{C}_2 - \frac{1}{Sc} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\psi^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial \psi} \right) = \frac{p}{Sc} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\psi^{n+1/2} \int_p^{\infty} \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial \psi} (\lambda, \psi) c_n(\lambda - p) \frac{d\lambda}{\lambda} \right] \quad (10.9)$$

avec pour conditions aux limites :

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\psi \rightarrow 0} \mathcal{C}_2(p, \psi) &= \delta(p) \\ \lim_{\psi \rightarrow \infty} \mathcal{C}_2(p, \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

$\delta(p)$ est l'image de :

$$\theta_p(t) = \theta_2(t, 0).$$

Effectuons les changements de variables :

$$s = Sc^{\frac{1}{2}} q = \frac{4}{3} Sc^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} \psi^{\frac{1}{2}} \quad (10.11)$$

et :

$$\mathcal{V}_2(p, s) = s^{-3} \mathcal{C}_2(p, \psi). \quad (10.12)$$

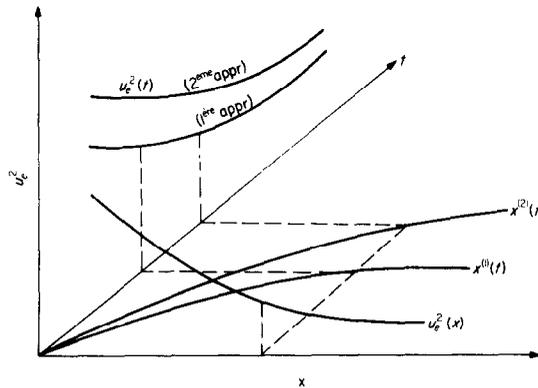


FIG. 14. Schéma explicatif du passage de la variable t à la variable x .

Après avoir divisé par $ps^{\frac{1}{2}}$ et changé de signe toute l'équation, nous obtenons, si l'on désigne par $H_2(p, s)$ le second membre de l'équation (10.9):

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}_2}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial \mathcal{V}_2}{\partial s} - \left(1 + \frac{1}{9s^2} \right) \mathcal{V}_2 = H_2(p, s). \quad (10.13)$$

Calculons $H_2(p, s)$ en posant :

$$\sigma = \left(\frac{\lambda}{p} \right)^{\frac{1}{2}} s. \quad (10.14)$$

Le second membre de l'équation (10.13) s'écrit, compte tenu de (10.11), (10.12) et (10.14):

$$H_2 = -p^{\frac{1}{2}} Sc s^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} (p Sc)^{-n/3} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ s^{2(n+1)/3} \int_p^{\infty} \lambda^{-\frac{1}{2}} \sigma^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\sigma^{\frac{1}{2}} \mathcal{V}_1(\lambda, \sigma) \right] c_n(\lambda - p) d\lambda \right\}. \quad (10.15)$$

Remplaçons dans (10-15) $\mathcal{V}_1(\lambda, \sigma)$ par son expression tirée de la première approximation et exprimons-le avec les variables p, s et λ :

$$H_2 = \frac{3^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{2}{3})}{2^{\frac{1}{2}} \pi} p^{\frac{1}{2}} s^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} (p Sc)^{-n/3} \frac{\partial}{\partial s} \left[s^{2(n+1)/3} \int_p^{\infty} \lambda^{-\frac{1}{2}} \delta(\lambda) K_{\frac{1}{3}} \left(s \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}}{p^{\frac{1}{2}}} \right) c_n(\lambda - p) d\lambda \right]. \quad (10.16)$$

L'intégrale générale de l'équation (10-13) est de la forme:

$$\mathcal{V}_2(p, s) = B_2^-(p, s) I_{-\frac{1}{3}}(s) + B_2^+(p, s) I_{+\frac{1}{3}}(s). \quad (10.17)$$

Appliquons les conditions aux limites en tenant compte du comportement aux limites des fonctions de Bessel modifiées.

Nous obtenons:

$$B_2^-(p, s) = b_2^-(p) - \frac{\pi}{3^{\frac{1}{2}}} \int_0^s s H_2(p, s) I_{\frac{1}{3}}(s) ds. \quad (10.18)$$

$$B_2^+(p, s) = b_2^+(p) + \frac{\pi}{3^{\frac{1}{2}}} \int_0^s s H_2(p, s) I_{-\frac{1}{3}}(s) ds, \quad (10.19)$$

$$b_2^-(p) = 2^{-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(\frac{2}{3}) \cdot \delta(p), \quad (10.20)$$

$$b_2^+(p) = -2^{-\frac{1}{2}} \cdot \Gamma(\frac{2}{3}) \cdot \delta(p) - \int_0^{\infty} s H_2(p, s) K_{\frac{1}{3}}(s) ds. \quad (10.21)$$

En portant (10.18), (10.19), (10.20), et (10.21) dans (10.17), nous obtenons la transformée de Carson de la solution de la deuxième approximation. Nous n'avons pu obtenir l'original de cette expression, mais en prenant le développement limité à la paroi en $s^{\frac{1}{2}}$ nous avons pu obtenir la densité de flux pariétale de la deuxième approximation.

En prenant le développement limité de $\mathcal{C}_2(p, s)$, le transformé de ce développement sera :

$$\mathcal{C}_2(p, s) = \delta(p) - 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{3}} Sc^{\frac{1}{3}} p^{-\frac{1}{2}} \chi_2(p) s^{\frac{1}{2}} + O(\psi), \quad (10.22)$$

avec:

$$\chi_2(p) = \frac{\varphi_{p2}(t)}{[\tau_{p2}(t)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (10.23)$$

En comparant les développements limités de (10.17) et de (10.22) en $s^{\frac{1}{3}}$, il vient :

$$\chi_2(p) = - (Sc)^{-\frac{1}{3}} \frac{2^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{3}}}{\Gamma(\frac{1}{3})} p^{\frac{1}{3}} b_2^+(p). \tag{10.24}$$

Explicitons l'intégrale de $b_2^+(p)$ donnée par l'équation (3.21) :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \int_0^\infty s H_2(p, s) K_{\frac{1}{3}}(s) ds &= -\frac{3^{\frac{1}{3}} \Gamma(\frac{2}{3})}{2^{\frac{1}{3}} \pi} p^{\frac{1}{3}} s^{-\frac{1}{3}} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} (p \cdot Sc)^{-n/3} \\ &\int_0^\infty s^{\frac{1}{3}} K_{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial s} \left[\left[s^{2(n+1)/3} \int_p^\infty \lambda^{-\frac{1}{3}} \delta(\lambda) K_{\frac{1}{3}} \left[s \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{3}} \right] c_n(\lambda - p) d\lambda \right] \right] ds. \end{aligned} \tag{10.25}$$

Intégrons par parties :

$$\int_0^\infty s^{\frac{1}{3}} K_{\frac{1}{3}} \frac{\partial}{\partial s} [\dots] ds,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{3^{\frac{1}{3}} \Gamma(\frac{2}{3}) p^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}} \pi} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} (p \cdot Sc)^{-n/3} \int_0^\infty s^{(2n/3)+1} K_{\frac{1}{3}}(s) \\ \left[\int_p^\infty \lambda^{-\frac{1}{3}} \delta(\lambda) K_{\frac{1}{3}} \left[s \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{3}} \right] c_n(\lambda - p) d\lambda \right] ds. \end{aligned} \tag{10.26}$$

Intervertissons l'ordre d'intégration, ce qui est possible car les intégrales sont convergentes :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{3^{\frac{1}{3}} \Gamma(\frac{2}{3})}{2^{\frac{1}{3}} \pi} p^{\frac{1}{3}} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^{2n/3} (p \cdot Sc)^{-n/3} \int_p^\infty \lambda^{\frac{1}{3}} \delta(\lambda) c_n(\lambda - p) \\ \left[\int_0^\infty s^{(2n/3)+1} K_{\frac{1}{3}} \left[s \left(\frac{\lambda}{p}\right)^{\frac{1}{3}} \right] K_{\frac{1}{3}}(s) ds \right] d\lambda. \end{aligned} \tag{10.27}$$

La dernière intégrale est de la forme :

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^\infty s^\lambda K_\mu(\alpha, s) K_\nu(\beta, s) ds. \tag{10.28}$$

qui existe lorsque $\mu + \nu < \lambda + 1$, elle s'exprime à l'aide d'une fonction hypergéométrique :

$$I(\alpha, \beta) = \frac{G(\lambda, \mu, \nu)}{\alpha^{1+\lambda-\nu} \beta^\nu} {}_2F_1 \left(\frac{1 + \lambda - \mu - \nu}{2}, \frac{1 + \lambda + \mu - \nu}{2}, 1 + \lambda, 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \tag{10.29}$$

avec :

$$\begin{aligned} G(\lambda, \mu, \nu) = \frac{2^{\lambda-2}}{\Gamma(1 + \lambda)} \Gamma \left(\frac{1 + \lambda - \mu - \nu}{2} \right) \Gamma \frac{1 + \lambda - \mu + \nu}{2} \Gamma \frac{1 + \lambda + \mu + \nu}{2} \\ \Gamma \left(\frac{1 + \lambda + \mu - \nu}{2} \right). \end{aligned} \tag{10.30}$$

Ici:

$$\lambda = \frac{2}{3}n + 1, \quad \mu = \nu = \frac{2}{3}, \quad \alpha = \sqrt{(\lambda/p)}, \quad \beta = 1, \quad (10.31)$$

d'où:

$$\mathcal{L} = \frac{3^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{2}{3})}{2^{\frac{1}{2}} \pi} p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} S c^{-n/3} \frac{\Gamma(n/3 + \frac{1}{3}) \Gamma^2(n/3 + 1) \Gamma(n/3 + \frac{2}{3})}{\Gamma((2n/3) + 3)} \int_p^{\infty} \lambda^{-n/3-1} \delta(\lambda) c_n(\lambda - p) {}_2F_1\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1, \frac{2n}{3} + 2, 1 - \frac{p}{\lambda}\right) d\lambda \quad (10.32)$$

en portant (10.32) dans (10.24), nous obtenons:

$$\chi_2(p) = \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} \Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3})} p^{\frac{1}{2}} \left[\delta(p) + \frac{3^{\frac{1}{2}} p}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} S c^{-n/3} \frac{\Gamma(n/3 + \frac{1}{3}) \Gamma^2\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left[\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right]}{\Gamma(2n/3 + 2)} \int_p^{\infty} \lambda^{-n/3-1} \delta(\lambda) c_n(\lambda - p) {}_2F_1\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1, \frac{2n}{3} + 2, \frac{\lambda - p}{\lambda}\right) d\lambda \right] \quad (10.33)$$

Cette expression peut se mettre sous la forme:

$$\chi_2(p) = k \frac{1}{p} p^{\frac{1}{2}} [p \delta(p) + p \Delta(p)] \quad (10.34)$$

k étant une constante et:

$$\Delta(p) \subset \Theta(t) \quad (10.35)$$

Θ étant une fonction inconnue pour l'instant.

Appliquons le théorème de Borel (3.11) pour trouver l'original du deuxième membre de l'équation (10.34).

Posons dans (3.11):

$$F(p) = p^{\frac{1}{2}}, \quad f(t) = \frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{2}{3})} \quad (10.36)$$

$$G(p) = [\delta(p) + \Delta(p)], \quad g(t) = [\theta_2(t, \theta) + \Theta] \quad (10.37)$$

d'où:

$$\varphi_{p2}(t) = \frac{2^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{3})} S c^{-\frac{1}{3}} (\tau_{p2}(t))^{\frac{1}{2}} \int_0^t (t - t')^{-\frac{1}{2}} d(\theta_p + \Theta). \quad (10.38)$$

Cherchons l'original $\Theta(t)$ de $\Delta(p)$ donné par:

$$\Delta(p) = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2\pi} p \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} S c^{-n/3} \frac{\Gamma(n/3 + \frac{1}{3}) \Gamma^2\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right)}{\Gamma(2n/3 + 2)} \int_p^{\infty} \lambda^{-n/3-1} \delta(\lambda) c_n(\lambda - p) {}_2F_1\left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}, \frac{n}{3} + 1, \frac{2n}{3} + 2, \frac{\lambda - p}{\lambda}\right) d\lambda. \quad (10.39)$$

Remplaçons la fonction ${}_2F_1$ par son développement en série :

$${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\Gamma(\beta + r)}{\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma + r)} \cdot \frac{x^r}{\Gamma(1 + r)} \tag{10.40}$$

et intervertissons dans (3.39) le signe somme \int_p^∞ et le signe somme de la série $\sum_{r=0}^\infty$ introduit par le développement en série de la fonction ${}_2F_1$:

$$\Delta(p) = \frac{3^\ddagger p}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} Sc^{-n/3} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/3 + \frac{1}{3} + r) \Gamma(n/3 + 1 + r)}{\Gamma(2n/3 + 2 + r) \Gamma(1 + r)} \int_p^\infty \lambda^{-n/3-1} \delta(\lambda) c_n(\lambda - p) \left(\frac{\lambda - p}{\lambda}\right)^r d\lambda. \tag{10.41}$$

Nous obtiendrons l'original de cette expression à l'aide du théorème de Poli [11]. Posons dans (9.22) :

$$g(\lambda - p) = c_n(\lambda - p)(\lambda - p)^r \tag{10.42}$$

$$F(\lambda) = \lambda^{-n/3-r} \cdot \delta(\lambda). \tag{10.43}$$

Or :

$$\frac{1}{p} (p^{-n/3-r}) \cdot p \delta(\lambda) \subset \int_0^t \frac{(t - t')^{n/3+r}}{\Gamma(n/3 + r + 1)} \cdot d[\theta_p(t')] \tag{10.44}$$

d'où :

$$f(t) = \int_0^t \frac{(t - t')^{n/3+r}}{\Gamma(n/3 + r + 1)} d[\theta_p(t')]. \tag{10.45}$$

La fonction $g(t)$ est obtenue à l'aide de (2.21), soit :

$$c_n(t) \cdot t^r \supset (-1)^n p \frac{d^r \gamma_n}{dp^r} \tag{10.46}$$

d'où :

$$G(t) = (-1)^r t \frac{d^r \gamma_n}{dt^r}. \tag{10.47}$$

La transformée complète est donc :

$$(-1)^r \frac{d^r \gamma_n(t)}{dt^r} \int_0^t \frac{(t - t')^{n/3+r}}{\Gamma(n/3 + r + 1)} d[\theta_p(t')]. \tag{10.48}$$

d'où :

$$\Theta = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{2n/3} Sc^{-n/3} \Gamma\left(\frac{n}{3} + 1\right) \Gamma\left(\frac{n}{3} + \frac{5}{3}\right) \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n/3 + \frac{1}{3} + r)}{\Gamma(2n/3 + 2 + r) \Gamma(1 + r)} (-1)^n \frac{d^r \gamma_n(t)}{dt^r} \int_0^t (t - t')^{n/3+r} d[\theta_p(t')]. \quad (10.49)$$

L'équation (10.38) jointe à l'équation (10.48) et à la deuxième approximation dynamique (9.31), permet de calculer la différence entre les deux premières approximations.

Nous avons calculé, pour une plaque plane, dans quelques cas particuliers, le développement de Θ en fonction de l'inverse du nombre de Schmidt.

Cas d'une concentration constante à la paroi :

$$1 + \frac{\Theta}{\theta_p} = 1 - \frac{1,1 \cdot 10^{-2}}{Sc} + \frac{1,04 \cdot 10^{-3}}{Sc^2} + \frac{1,4 \cdot 10^{-5}}{Sc^3} + \dots \quad (10.50)$$

Cas d'un flux constant à la paroi :

$$1 + \frac{\Theta}{\theta_p} = 1 - \frac{0,53 \cdot 10^{-2}}{Sc} + \frac{0,27 \cdot 10^{-3}}{Sc^2} + \frac{0,88 \cdot 10^{-5}}{Sc^3} + \dots \quad (10.51)$$

Cas d'une réaction catalytique du premier ordre :

$$1 + \frac{\Theta}{\theta_p} \simeq 1 - \frac{6 \cdot 10^{-3}}{Sc} + \frac{10^{-4}}{Sc^2} - \frac{5 \cdot 10^{-6}}{Sc^3} + \dots \quad (10.52)$$

La densité de flux massique, dans le cas de la deuxième approximation, est obtenue par la formule suivante :

$$\varphi_{p2} = \varphi_{p1} f(\tau_{p1}, \tau_{p2}) \cdot \left(1 + \frac{\Theta}{\theta_p}\right). \quad (10.53)$$

La fonction f est obtenue en comparant les expressions (10.38) et (5.1).

De la même manière que dans le second chapitre, on peut ajuster les profils de concentration obtenus dans le cadre de la première approximation en faisant une affinité dans le plan (t, ψ) , de telle façon que la densité pariétale de flux de masse correspondant à ces nouveaux profils soit égale à φ_{p2} .

Les résultats obtenus avec cette méthode coïncident avec les profils déjà obtenus dans les cas de similitude sur une plaque plane, à moins de 1 pour cent dans toute la couche limite.

11. CONCLUSION

Nous avons présenté une méthode d'intégration de la couche limite laminaire dans un fluide à propriétés physiques constantes en s'attachant plus particulièrement à l'équation de la diffusion. Cette méthode consiste en un processus itératif.

La première approximation a été résolue entièrement et les profils de concentration réduite correspondant à différentes conditions aux limites ont été présentés. Dans le cas particulier de la plaque plane où l'on peut comparer avec les intégrations exactes (profils en similitude), on constate que l'erreur est faible et dépend du nombre de Schmidt.

Lorsque le gradient de pression dans la couche limite n'est plus négligeable, on améliore de beaucoup les résultats en résolvant les équations de la deuxième approximation. Cette résolution introduit une correction fonction du nombre de Schmidt. Dans le cas particulier de la plaque plane (profils en similitude), on retrouve à moins de 1 pour cent les profils exacts de vitesse et de concentration. L'expression de la densité de flux de masse à la paroi, lorsqu'on a une catalyse du premier ordre, a été déterminée, dans le cadre de la deuxième approximation, en fonction des nombres de Schmidt et de Damköhler.

Cette étude a fait l'objet d'une communication au Symposium International sur la Dynamique des Fluides Des Milieux Continus Hétérogènes à Plusieurs Phases organisé par l'Académie Internationale d'Astronautique à Naples du 3 au 6 octobre 1966.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. C. JUNGERS *et al.*, *Cinétique Chimique Appliquée*, p. 410. Edition Technip, Paris (1958).
2. M. J. LIGHTHILL, Contribution to the theory of heat transfer through a laminar boundary layer, *Proc. R. Soc. A* **202**, 359–377 (1950).
3. B. LE FUR, Convection de la chaleur en régime laminaire dans le cas d'un gradient de pression et d'une température de paroi quelconques, le fluide étant à propriétés physiques constantes, *Int. J. Heat Mass Transfer* **1**, 68 (1960).
4. *Handbook of Mathematical Functions*. Nat. Bureau of Standards, Washington, (1964).
5. G. LASSAU, Expression approchée du profil des vitesses et des concentrations dans une couche limite laminaire, *C.R. Hebd. Séanc. Acad. Sci., Paris* **261**, p. 4617–4620 (29 nov. 1965).
6. E. GOURSAT, Cours d'Analyse Mathématique, tome 3. Gauthier-Villars, Paris (1956).
7. P. L. CHAMBRÉ and A. ACRIVOS, On chemical surface reactions in laminar boundary layer flow, *J. Appl. Phys.* **27**, 1322–1328 (1956).
8. P. M. CHUNG, S. LIU and H. MIRELS, Effect of discontinuity of surface catalycity on boundary layer flow of dissociated gas, *Int. J. Heat Mass Transfer* **6** (3), 193–210 (1963).
9. P. THUREAU, Étude d'une méthode de mesure des températures utilisant la sensibilité thermique des couleurs de fluorescence, Pub. Sc. et Techn. du Ministère de l'Air, No. 349, Paris (1959).
10. B. LE FUR, Nouvelle méthode de résolution par itération des équations dynamique et thermique de la couche limite laminaire, Pub. Sc. et Techn. du Ministère de l'Air, No. 383, Paris (1962).
11. L. POLI, Règles pour le calcul symbolique. Nouveau théorème du produit, *Annl. Soc. Scient. Brux.* **63**, 154–155 (1949).

Abstract—A method of integration of the laminar boundary-layer equations is presented for a fluid with constant properties, with emphasis on the resolution of the diffusion equation. This method is based on an iterative process.

The first approximation is solved exactly, and dimensionless concentration profiles corresponding to various boundary conditions are presented. Comparison with the known exact solution, in the case of a flat plate, shows that the error is negligible, and depends upon the Schmidt number.

For a non zero pressure gradient boundary layer, the results are greatly improved by solving the equations for the second approximation. The correction term is a function of the Schmidt number. For a flat plate (similar profiles) the accuracy, on velocity and concentration profiles, obtained with the second approximation is better than 1 per cent.

The mass transfer at the wall is calculated, in the case of first order catalysis, and using the second approximation, as a function of the Schmidt number and the catalytic Damköhler number (ratio of the reaction constant to the flow velocity).

The interest of the method lies in the fact that it can be used in cases where similarity does not apply; the corresponding numerical calculations are much simpler than the calculation by finite difference methods.

Zusammenfassung—Es wird eine Methode für die Integration der laminaren Grenzschichtgleichungen für eine Flüssigkeit mit konstanten Stoffwerten angegeben, mit Betonung der Lösung der Diffusionsgleichung. Die Methode beruht auf einem iterativen Prozess.

Die erste Näherung wird exakt gelöst und Profile für die dimensionslose Konzentration werden für verschiedene Randbedingungen angegeben. Ein Vergleich mit der bekannten exakten Lösung für den Fall der ebenen Platte zeigt, dass der Fehler, der von der Schmidt-Zahl abhängt, vernachlässigbar klein ist.

Für eine Grenzschicht, mit dem Druckgradienten null, wurden die Ergebnisse stark verbessert durch Lösung der Gleichung für die zweite Näherung. Das Korrekturglied ist eine Funktion der Schmidt-Zahl. Die mit der zweiten Näherung erreichte Genauigkeit für das Geschwindigkeits- und Konzentrationsfeld ist für eine ebene Platte (ähnliche Profile) besser als 1 %.

Der Stofftransport an der Wand wird für den Fall einer Katalyse erster Ordnung mit Hilfe der zweiten Näherung als Funktion der Schmidt-Zahl und der katalytischen Damköhler-Zahl (Verhältnis von Refraktionskonstante zu Strömungsgeschwindigkeit) berechnet.

Die Methode ist deshalb interessant, weil sie in Fällen angewendet werden kann, in denen die Ähnlichkeitstheorie versagt. Die entsprechenden numerischen Berechnungen sind viel einfacher, als die Berechnung mit Hilfe von Differenzenverfahren.

Аннотации—Дается метод интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя для жидкости с постоянными свойствами, при этом основное внимание уделяется решению уравнения диффузии. Этот метод основан на процессе итеграции.

Первое приближение решено точно. Приводятся безразмерные профили концентрации, соответствующие различным граничным условиям. Из сравнения с известным точным решением для случая плоской пластины следует, что погрешность незначительна и зависит от числа Шмидта.

Для пограничного слоя с градиентом давления, не равном нулю, результаты намного улучшаются решением уравнения во втором приближении. Поправочный член есть функция числа Шмидта. Для плоской пластины (автомодельные профили) точность профилей скорости и концентрации, полученная во втором приближении, лучше, чем 1 %.

С помощью второго приближения рассчитывается массоперенос в случае каталитических реакций первого порядка как функция числа Шмидта и каталитического числа Дамкёлера (отношение константы реакции к скорости потока).

Метод представляет интерес потому, что может быть использован в случаях, в которых не используется условие автомоделности; соответствующие численные расчеты на много проще расчета с помощью методов конечной разности.